Универзитет у Београду **28.6.2022.**

Класификациони испит из математике за упис на Грађевински факултет

Шифра задатка: $\boxed{20222}$

Тест има 20 задатака на две странице. Задаци $1-3$ вреде по 4 поена, задаци $4-17$ вреде по 5 поена и задаци $18-20$ вреде по 6 поена. Погрешан одговор доноси -10% поена од броја поена предвиђених за тачан одговор. Заокруживање Н не доноси ни позитивне, ни негативне поене. У случају заокруживања више од једног, као и у случају незаокруживања ниједног одговора, добија се -1 поен.

1. Вредност израза $\dfrac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\dfrac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ једнака је:

Решење Директним рачуном добија се:

$$\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}}-\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{5-2\sqrt{15}+3-(5+2\sqrt{15}+3)}{5-3}=-2\sqrt{15}\,.$$

2. Ако је $f(x)=\dfrac{x-3}{x+3}$ и $g(x)=1+x$, онда је $g(f(-2))$ једнако:

Решење Директном заменом добијамо: $g(f(-2))=g(-5)=-4\,.$

3. Ако су x_1 и x_2 решења једначине $x^2+\sqrt{2}\,x+2=0$, онда је $2\,x_1^2x_2+2\,x_1x_2^2$ једнако:

Решење Применимо Виетове формуле: $x_1+x_2=-\sqrt{2}$, $x_1\cdot x_2=2$. Налазимо:

$$2\,x_1^2x_2+2\,x_1x_2^2=2\,x_1x_2(x_1+x_2)=-4\sqrt{2}\,.$$

4. Број решења једначине $|1+x|=(1+x)^2$ једнак је:

Решење За $x\geq -1$, налазимо:

$$|1+x|=(1+x)^2 \iff 1+x=(1+x)^2 \iff x(1+x)=0 \iff (x=0\vee x=-1)$$

Слично, за $x<-1$ биће $|1+x|=-(x+1)$, па налазимо да је једино решење на том интервалу $x=-2$. Дакле, дата једначина има три решења.

5. Збир прва три члана опадајуће геометријске прогресије је 78, а збир првог и трећег члана је 60. Пети члан те прогресије је:

Решење Из датих услова имамо $a_1+a_1q+a_1q^2=78$ и $a_1+a_1q^2=60$, па је $a_1q=18$, односно $q=18/a_1$. Заменом у другу једначину добијамо квадратну једначину:

$$3q^2-10q+3=0\,.$$

Како је $q<1$, одавде налазимо да је $q=1/3$, па је $a_1=54$. Дакле, $a_5=a_1q^4=2/3$.

6. Број решења једначине $2^{2x}-6\cdot 2^x+8=0$ једнак је:

Решење Увођењем смене $2^x=t$, $t>0$ добија се квадратна једначина $t^2-6t+8=0$, чија су решења $t_1=2$ и $t_2=4$. Одавде је $2^x=2$ или $2^x=2^2$. Дата једначина има два решења, $x_1=1$ и $x_2=2$.

$\boxed{\textbf{7.}}$ Права $x + y = -1$ и кружница $x^2 + y^2 = 1$ секу се у тачкама M и N. Тада је дужина тетиве MN једнака:

Решење Пресечне тачке M и N су решења система $x + y = -1$ и $x^2 + y^2 = 1$. Одавде се лако добија да је $M(-1, 0)$ и $N(0, -1)$, те је дужина тетиве MN једнака $\sqrt{2}$.

$\boxed{\textbf{8.}}$ Ако су $a, b \in \mathbb{R}$ и ако је полином $P(x) = x^4 + ax^3 + bx^2 - 1$ дељив полиномом $Q(x) = x^2 - 1$, онда је остатак при дељењу полинома $P(x)$ полиномом $x + 3$ једнак:

Решење Према Безуовој теореми $(x + 1)(x - 1) \mid P(x)$ ако је остатак при дељењу једнак нули, тј. $P(-1) = 0$ и $P(1) = 0$. Одавде налазимо

$$-a + b = 0 \wedge a + b = 0 \implies a = b = 0 \implies P(x) = x^4 - 1\,.$$

Тражени остатак при дељењу полиномом $x + 3$ биће једнак $P(-3) = (-3)^4 - 1 = 80$.

$\boxed{\textbf{9.}}$ Ако једначина $x^2+2x-2p = 0$ нема реалних решења, онда параметар p припада интервалу:

Решење Квадратна једначина нема реалних решења акко је њена дискриминанта мања од нуле, одакле добијамо:

$$D < 0 \iff 4 + 8p < 0 \iff 8p < -4 \iff p < -\frac{1}{2} \iff p \in \left(-\infty, -\frac{1}{2}\right)\,.$$

$\boxed{\textbf{10.}}$ Дате су тачке $A(0, 1)$ и $B(4, -1)$. Ако је дуж AB основица једнакокраког троугла $\triangle ABC$, онда висина тог троугла из темена C лежи на правој:

Решење Коефицијент правца праве AB једнак је $k = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = -\frac{2}{4} = -\frac{1}{2}$. Висина из темена C једнакокраког троугла лежи на симетрали дужи AB. Како је средиште ове дужи тачка $(2, 0)$ и како је коефицијент симетрале $k_s = -1/k = 2$, налазимо једначину тражене праве:

$$s : y - 0 = 2(x - 2) \iff 2x - y = 4\,.$$

$\boxed{\textbf{11.}}$ Ако је $a = \sin 2022^\circ$, $b = \cos 2022^\circ$ и $c = \operatorname{tg} 2022^\circ$, онда важи:

Решење Како је $2022^\circ = 5\pi + 42^\circ$, то је $\sin 2022^\circ = -\sin 42^\circ$, $\cos 2022^\circ = -\cos 42^\circ$ и $\operatorname{tg} 2022^\circ = \operatorname{tg} 42^\circ$, очигледно је $\operatorname{tg} 2022^\circ$ највећи број будући да је једини позитиван. С друге стране,

$$\cos 42^\circ > \sin 42^\circ \implies -\cos 42^\circ < -\sin 42^\circ \implies b < a < c\,.$$

$\boxed{\textbf{12.}}$ Колико има петоцифрених природних бројева дељивих са 5 састављених од цифара из скупа $\{1, 3, 5, 7, 9\}$?

Решење Будући да дати скуп не садржи нулу, на последња цифра мора бити цифра 5 и на том месту имамо само једну могућност. Преостала четири места могу се попунити било којом цифром из датог скупа, те је тражени број једнак $5^4 = 625$.

$\boxed{\textbf{13.}}$ Вредност израза $(1 + i\sqrt{3})^{2022} - (1 - i\sqrt{3})^{2022} = -8$ једнака је:

Решење Како је $(1+i\sqrt{3})^3 = (1-i\sqrt{3})^3 = -8$ и како је број 2022 дељив бројем 3, налазимо

$$(1 + i\sqrt{3})^{2022} - (1 - i\sqrt{3})^{2022} = (-8)^{674} - (-8)^{674} = 0.$$

$\boxed{\textbf{14.}}$ Број реалних решења једначине $\sqrt{1 - x} = 1 + x$ једнак је:

Решење Дата једначина има једно реално решење. Наиме:

$$\sqrt{1 - x} = 1+x \iff 1-x \geq 0 \wedge 1+x \geq 0 \wedge 1-x = (1+x)^2 \iff x \in [-1, 1] \wedge x^2+3x = 0 \iff x = 0\,.$$

$\boxed{\textbf{15.}}$ Ротацијом правоугаоника чије су странице a и b око странице a добија се ротационо тело запремине V и површине P. Тада је однос $2V : P$ једнак:

Решење Према датим подацима ротацијом се добија ваљак висине a и полупречника основе b. Одавде је

$$\frac{2V}{P} = \frac{2b^2\pi a}{2b\pi(a+b)} = \frac{ab}{a+b}\,.$$

$\boxed{\textbf{16.}}$ Решење неједначине $x+3 \geq \dfrac{4}{2-x}$ је скуп:

Решење Дата неједначина еквивалентна је са неједначином:

$$\frac{(x+3)(2-x)-4}{2-x} \geq 0 \iff \frac{x^2+x-2}{x-2} \geq 0 \iff \frac{(x+2)(x-1)}{x-2} \iff x \in [-2,1] \cup (2,+\infty)\,.$$

$\boxed{\textbf{17.}}$ Ако је M највећа, а m најмања вредност функције $f(x) = x^2 - x + 1$ на одсечку $[-1,1]$, онда је $M + 4m$ једнако:

Решење Дата функција је парабола коју најмању вредност достиже у темену $T(1/2, 3/4)$. Како $1/2 \in [-1,1]$ и како у крајевима важи $f(1) = 1$ и $f(-1) = 3$, налазимо да је $M = f_{\max} = f(-1) = 3$, $m = f_{\min} = f(1/2) = 3/4$, те је $M + 4m = 3 + 3 = 6$.

$\boxed{\textbf{18.}}$ Вредност збира $1 + 3 + 5 + \cdots + 4041 + 4043$ износи:

Решење Збир првих n непарних бројева једнак је n^2. Како је $2n-1 = 4043$, то је $n = 2022$, па је тражени збир једнак 2022^2.

$\boxed{\textbf{19.}}$ Скуп решења неједначине $\log_{x-1}\left|x - \dfrac{3}{2}\right| > 0$ је:

Решење Неједначина је дефинисана за, $x - 1 > 0 \wedge x - 1 \neq 1 \wedge x \neq 3/2$, тј. за

$$x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \cup (2, +\infty).$$

У зависности од основе логаритма разликујемо два случаја: $x - 1 > 1$ и $x - 1 < 1$. У првом случају посматрана неједначина је еквивалентна неједначини

$$\left|x - \frac{3}{2}\right| > 1 \wedge x > 2 \iff \left(x - \frac{3}{2} < -1 \vee x - \frac{3}{2} > 1\right) \wedge x > 2 \iff x \in \left(\frac{5}{2}, +\infty\right),$$

У другом случају основа је мања од 1, па је решење

$$\left|x - \frac{3}{2}\right| < 1 \wedge x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \Leftrightarrow -1 < x - \frac{3}{2} < 1 \wedge x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right) \Leftrightarrow x \in \left(1, \frac{3}{2}\right) \cup \left(\frac{3}{2}, 2\right),$$

па је коначно решење скуп $\left(1, \dfrac{3}{2}\right) \cup \left(\dfrac{3}{2}, 2\right) \cup \left(\dfrac{5}{2}, +\infty\right)$.

$\boxed{\textbf{20.}}$ Збир решења једначине $\sin 2x + \sin 4x = 0$ на интервалу $(0, 2\pi)$ једнак је:

Решење Искористимо формулу за трасформацију збира тригонометриских функција у производ $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$, па добијамо да је дата једначина еквивалентна са

$$2\sin 3x \cos x = 0 \iff \sin 3x = 0 \vee \cos x = 0 \iff x = \frac{k\pi}{3} \vee x = \frac{\pi}{2} + l\pi,\ \ k, l \in \mathbb{Z}\,.$$

На интервалу $(0, 2\pi)$ решења су: $\dfrac{\pi}{3}$, $\dfrac{2\pi}{3}$, π, $\dfrac{4\pi}{3}$, $\dfrac{5\pi}{3}$, $\dfrac{\pi}{2}$ и $\dfrac{3\pi}{2}$, и њихов збир је једнак 7π.